a) $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 + 1 - 1$

$= (u_n - 1)(u_n - 1)$

or $u_n \leqslant \frac{3}{2} \Rightarrow u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2}$

$\leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$

Ainsi $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

b) pour $n = 0$; $u_0 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2^{0+1}}$

Marie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$

et montrons que $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$.

On a $u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2}(u_n - 1) \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$

or $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$

Ainsi $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+2}}$

Conclusion: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}}$